بازنمایی‌های چندگانه و محاسبهٔ حد تابع توسط دانش‌آموزان

الهه باقرصاد
مدرس ریاضی و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت‌دبیر شهید رجایی تهران
نرگس یافتیان
استادیار دانشگاه تربیت‌دبیر شهید رجایی تهران

چکیده

یکی از مفاهیمی که دانش‌آموزان در سال‌های پایانی دورهٔ دوم متوسطه با آن مواجه می‌شوند، مفهوم «حد» است. این مفهوم، از یک طرف با مفاهیم متعدد دیگری در ارتباط است و از طرف دیگر، پایهٔ مفاهیمی چون پیوستگی، مشتق و ... است. ولی بیشتر دانش‌آموزان با درک عمیق این مفهوم مهم مشکل دارند و گاهی فقط قادرند با استفاده از فرمول‌ها و قواعد، مسائل مربوط به حد را حل کنند. بعضی از دانش‌آموزان نیز با بدفهمی‌های متعددی در این زمینه مواجه هستند. ارزیابی به کمک بازنمایی‌های متفاوت می‌تواند کمک شایانی به شناسایی و تا حدودی رفع بدفهمی‌ها داشته باشد.

هدف پژوهش حاضر بررسی میزان توانایی دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم تجربی در محاسبهٔ حد توابع با تأکید بر بازنمایی‌های چندگانه است که به روش توصیفی ـ پیمایشی انجام گرفت. نمونهٔ آماری ۲۷ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم تجربی منطقهٔ ۳ شهر تهران بودند که براساس نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. برای ابزار پژوهش دو آزمون محقق‌ساخته براساس بازنمایی‌های متفاوت در نظر گرفته شد. نتایج این آزمون‌ها نشان دادند که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به سؤالات حد از روی نمودار، نسبت به سؤالات حد براساس ضابطه، عملکرد پایین‌تری داشتند. یکی از علت‌های این امر را می‌توان عادت به استفاده از الگوریتم‌ها، رویه‌ها و فرمول‌ها توسط دانش‌آموزان دانست. عدم استفادهٔ کافی از سایر بازنمایی‌ها، از جمله نمودار نیز در این زمینه دخیل است.

کلیدواژه‌ها: بازنمایی، مفهوم حد تابع، تجسم، نمودار، شهود

مقدمه

بسیاری از پژوهشگران دریافته‌اند که بخشی از اندیشیدن از طریق شهود و تجسم صورت می‌گیرد و تجسم لازمهٔ بازنمایی‌ها و فرایندهای ادراک است. از سال‌ها پیش، نقش شهود در یاددهی ـ یادگیری ریاضیات به‌طور کلی و در حل مسائل ریاضی به‌طور خاص، مطرح بوده است (عربزاده، ۱۳۸۸). به‌ویژه نمودارها می‌توانند در توسعهٔ منطق ریاضی به دانش‌آموزان کمک کنند (سوچانسکی، ۲۰۱۸). در سال‌های اخیر، این موضوع به‌طور جدی‌تری توسط آموزشگران ریاضی مورد توجه قرار گرفته است.

با توجه به اینکه بخشی از تفکر ما از طریق تجسم صورت می‌گیرد، شاید آموزش تجسم‌محور مفاهیم انتزاعی و صوری ریاضی بتواند، ضمن ایجاد انگیزهٔ بیشتر، درک دانش‌آموزان را از این‌گونه مفاهیم ارتقا بخشد. درواقع تجسم می‌تواند از جمله شیوه‌های جایگزین و مرجعی مهم برای دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات باشد. افرادی که بر تفکر شهودی خود تکیه بیشتری

می‌کنند، منعطف‌تر فکر می‌کنند و خطرپذیری بیشتری در حل مسائل از خود نشان می‌دهند. اما افرادی که بیشتر به تفکر منطقی خود در حل مسائل وابسته هستند، سیالی ارائهٔ ایده‌ها در آن‌ها بیشتر دیده می‌شود (کیماز و همکاران، ۲۰۱۲).

تجسم و تصور ذهنی از اشیا، تصویرها و طرح‌ها، در مدل‌ها و نظریه‌های مختلف، دارای معانی گوناگونی است. مثلاً **پریزمگ**[1] (۲۰۰۷، نقل شده در: نظری، ۱۳۹۰: ۹) معتقد است: «استفاده از تصورات ذهنی با، یا بدون طراحی نمودار، تجسم نامیده می‌شود.» از نظر **تال**[2] (۱۹۸۱)، تجسم و تصور ذهنی دارای معنی بیولوژیکی است که در مغز ساخته می‌شود. شواهد قابل ملاحظه‌ای وجود دارند که دو نیم‌کرهٔ مغز، اطلاعات را به گونه‌هایی متفاوت پردازش می‌کنند. تحقیقات دو پزشک به نام‌های **دکس** و **بروکا**[3] نشان داد که ناحیهٔ مربوط به سخن گفتن در سمت چپ مغز قرار دارد؛ زیرا کسانی که پیش از مرگ دچار اختلال در صحبت کردن می‌شدند، صدماتی در نیم‌کرهٔ چپ مغز آن‌ها مشاهده می‌شد. این امر نخستین دلیل علمی را برای نامتقارن بودن دو نیم‌کرهٔ مغز از لحاظ کارکردی فراهم آورد. همچنین اعتقاد بر این است که نیم‌کرهٔ چپ جزئی‌نگر و عمدتاً مسئول فرایندهای تحلیلی و پردازش اطلاعات کلامی، ریاضی و منطقی است، در حالی که پردازش اطلاعات ادراکی، فضایی، شهودی، کلی و فی‌البداهه از وظایف نیم‌کرهٔ راست مغز است. لذا به نظر می‌رسد نیم‌کره‌های مغز مکمل یکدیگرند و هر دو نیمه به یک اندازه در یادگیری تأثیر دارند. به‌خصوص یادگیری ریاضیات با مخاطب قرار دادن هر دو نیم‌کره و استفاده از کل مغز ممکن خواهد بود، چرا که تفکر ریاضی با حرکت آزادانه میان تفکر شهودی، نمادی، رسمی، غیررسمی، تحلیلی، ادراکی و ذاتی شکل می‌گیرد. اما تجربه‌های بصری افراد مدت طولانی‌تری در حافظهٔ آن‌ها می‌ماند و توانایی یادآوری آن‌ها نیز راحت‌تر از نمایش‌های نمادی یا کلامی است (ریورا، ۲۰۱۱).

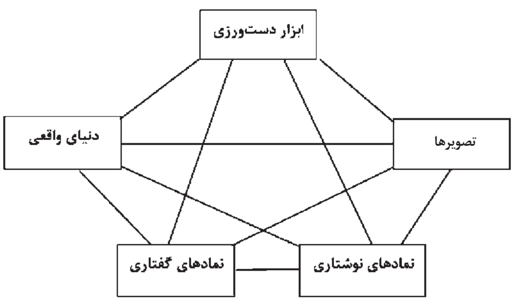
استفادهٔ دانش‌آموزان از نمایش‌های نمادی می‌تواند به ملموس‌تر و محسوس‌تر شدن ایده‌های ریاضی کمک کند (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰؛ سوچانسکی، ۲۰۱۸؛ امرسون و اندرسون، ۲۰۱۸). **رینر**[4] (۲۰۰۸) نیز تجسم ذهنی را به معنی دیدن با چشم مغز می‌داند. آموزشگران ریاضی مدل‌های مختلفی را برای به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و روابط ریاضی پیشنهاد داده‌اند. یکی از آن‌ها مدلی است که **لش**[5] پیشنهاد کرده و براساس نظریه‌ای از **پیاژه**، **برونر** و **دینس**[6] ساخته شده است. براساس نظر لش، این بازنمایی‌ها که در یادگیری و حل مسئله‌های ریاضی از آن‌ها استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱. بازنمایی ملموس (وضعیت‌های دنیای واقعی)
۲. بازنمایی فیزیکی (ابزار دست‌ورزی)

با توجه به اینکه بخشی از تفکر ما از طریق تجسم صورت می‌گیرد، شاید آموزش تجسم‌محور مفاهیم انتزاعی و صوری ریاضی بتواند، ضمن ایجاد انگیزهٔ بیشتر، درک دانش‌آموزان را از این‌گونه مفاهیم ارتقا بخشد

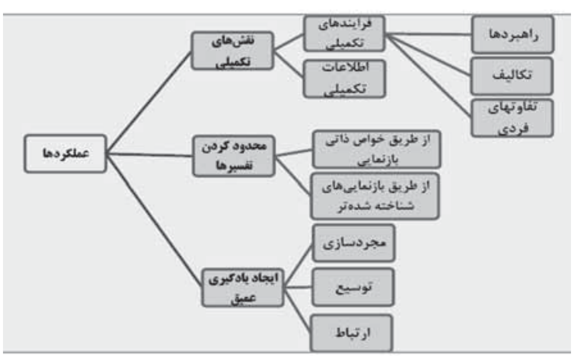
۳. بازنمایی تصویری (شکل‌ها و تصویرها)
۴. بازنمایی گفتاری
۵. بازنمایی نوشتاری. (نوروزی و همکاران، ۱۳۸۹)

برای مثال، دانش‌آموزان از مشاهده یا رسم یک شکل، نمودار یا تصویر، به‌طور شهودی برای فکر کردن دربارهٔ یک مفهوم ریاضی و ارتباط برقرار کردن با آن استفاده می‌کنند (بازنمایی تصویری). در مدل لش (نقل شده از: اویلوم، ۲۰۰۴) فقط بازنمایی‌های چندگانه و اهمیت آن‌ها مطرح نشده، بلکه ارتباطات میان این بازنمایی‌ها نیز نشان داده شده است (نمودار ۱).



نمودار ۱. مدل لش از بازنمایی‌های چندگانه و ارتباط آن‌ها (اقتباس از اویلوم، ۲۰۰۴)

بسیاری از محققان معتقدند که بازنمایی‌ها عملکردهای متفاوتی دارند، زیرا از مسیرهای مختلف بر یادگیری افراد تأثیر می‌گذارند. **اینسورث**[7] (۲۰۰۶) عملکرد بازنمایی‌های چندگانه را در چارچوب نمودار ۲ در معرض دید قرار داده است. او عقیده دارد، بازنمایی‌های چندگانه سه عملکرد دارند که عبارت‌اند از: ایفای نقش‌های تکمیلی، محدود کردن دامنهٔ تفسیرها، ایجاد یادگیری عمیق.



نمودار ۲. عملکرد بازنمایی‌های چندگانه (اینسورث، ۱۹۹۹، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۸)

اینســـورث (۲۰۰۶ و ۲۰۰۸) دلایـــل لـــزوم اســـتفاده از بازنمایی‌های چندگانه را در حالتی که نقش‌های تکمیلی دارند، به این صورت تشریح می‌کند:

● **راهبردها:** بازنمایی‌های چندگانه سبب ترغیب دانش‌آموزان به اســـتفاده از بیش از یک راهبرد در حل مسئله می‌شوند. اگر یک راهبرد ذاتاً ضعیف باشد، با برقراری اتصال بین چند راهبرد، فرایند حل مسئله موفقیت‌آمیزتر خواهد بود.

● **تکلیف‌ها:** اگر به دانش‌آموزان تکلیف‌هایی داده شـــوند که قابلیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه را داشته باشند، آن‌گاه دانش‌آموزان می‌توانند متناســـب با درک خود، بهترین شیوه را برای حل آن‌ها اتخاذ کنند.

● **تفاوت‌های فردی:** به دلیل وجود این تفاوت‌ها، باید شرایطی برای دانش‌آموزان فراهم شود که آن‌ها با انتخاب‌های متعدد از بین بازنمایی‌های متفاوت مواجه شوند.

شایان ذکر است که هر بازنمایی دارای نقاط ضعف و قوتی است. بنابراین فراگیرندگان با به‌کارگیری ترکیبی از بازنمایی‌ها می‌توانند با دسته‌بندی اطلاعات مربوطه، از فرایندهای ادراکی بهره‌برداری کنند (احمدی، ۱۳۹۶).

پولیا[۸] (۱۳۸۵: ۴۷) معتقد بود: «در تدریس حل مســـئله، معلم باید بر تفاوت دیدن و ثابت کردن بیشـــتر تأکید کند و در نظر داشته باشد که مجسم و عینی ساختن عناصر مجرد ریاضی مسئله، می‌تواند بسیار سودمند واقع شود. مثلاً از فضای فیزیکی کلاس درس برای تجســـم متوازی‌السطوح در ذهن دانش‌آموز کمـــک بگیرد.» همچنین پولیا می‌گوید: کوشـــش برای اثبات صوری آنچه به شهود دیده شده و دیدن شهودی آنچه به شکل صوری به اثبات رسیده، یک تمرین تقویت‌کنندهٔ عقلی و ذهنی است.

پژوهشـــگران معتقدند: یادگیرنده براساس تجسم ذهنی، مدل‌های ذهنی‌اش را می‌ســـازد. آن‌ها رابطهٔ بین تجسم ذهنی و مدل‌های ذهنی وابسته را مورد توجه قرار داده و معتقدند که مدل‌های ذهنی، نمایش‌های درونی و تجسم ذهنی، بازنمایی‌های بیرونی هســـتند. سهم هرکدام از حس‌های فرد در یادگیری به قرار زیر است (سوبانسکی، ۲۰۰۲: ۱۰):

■ چشایی: ۳٪
■ بویایی: ۳٪
■ لامسه: ۶٪
■ شنوایی: ۱۳٪
■ بینایی: ۷۵٪

دانش‌آموزانی که به‌طور شهودی مفهومی را آموزش دیده‌اند، آن را عمیق‌تر درک می‌کنند و می‌توانند در موقعیت‌های مناسب آن مفهوم را به‌کار گیرند. گاهی یک استدلال جبری کسالت‌آور، به کمک یک شـــباهت و قیاس هندسی که نوعی تجسم است، می‌تواند به اندازه‌ای ســـاده و زیبا شـــود که تمام ابعاد قضیه یا مسئله، تقریباً در یک نگاه دیده شود. از طرف دیگر، هدف اصلی از آموزش ریاضیات به دانش‌آموزان، توسعهٔ درک ریاضی و رشد توانایی حل مســـئله در آن‌هاست که این مهم به شیوهٔ تدریس معلم وابسته است. همچنین معلمانی که از دلایل بدفهمی‌های دانش‌آموزان براساس دانش محتوایی ریاضی آگاه هستند، قادر به سازمان‌دهی بهتر و مؤثرتر «دانش پداگوژیکی»[۹] خود و فرایند یاددهی ـ یادگیری هســـتند (کنیال‌لو، ۲۰۱۰). اگر دانش‌آموز بتواند به جای اندیشـــیدن در قالب کلمه‌ها، افکارش را در قالب تصویرها نمایش دهد، حل مســـائل انتزاعـــی و دور از ذهن نیز برایش آسان‌تر و دلپذیرتر می‌شود. تجربه‌های تدریس معلمان نشان می‌دهند که تدریس تجسمی می‌تواند زمینهٔ این موضوع را فراهم آورد. از جمله مفاهیمی که در تدریس آن، شهود و تجسم نقش بسزایی دارد، مفهوم حد است.

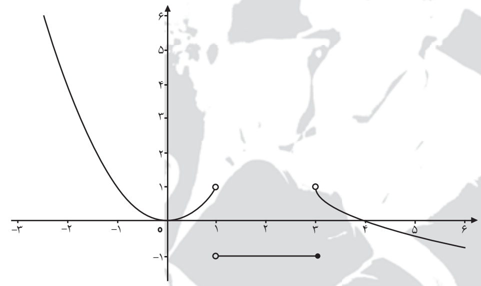
بسیاری از پژوهشگران دریافته‌اند که بخشی از اندیشیدن از طریق شهود و تجسم صورت می‌گیرد و تجسم لازمهٔ بازنمایی‌ها و فرایندهای ادراک است

حد یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریاضیات است که پایهٔ بسیاری از مفاهیم دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال را تشکیل می‌دهـــد و به مفاهیم زیادی، نظیـــر بی‌نهایت بزرگ، بی‌نهایت کوچک، پیوستگی، مشتق‌پذیری، هم‌گرایی دنباله‌ها و ... مرتبط می‌شود. دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه در ایران با این مفهوم به‌طور مستمر سروکار دارند، بنابراین اگر مفهوم حد را به درستی درک نکنند، نمی‌توانند دیگر مفاهیم وابسته به آن را هم درک کنند. در نتیجه، توجه درست و صحیح به آموزش حد می‌تواند بسیاری از مشـــکلات آتی دانش‌آموزان و نیز دانشجویان را در حساب دیفرانســـیل و انتگرال برطرف سازد. تصورات اشتباه در مراحل اولیهٔ آموزش مفهوم حد، بســـیار سخت اصلاح می‌شوند (اورتمن، ۲۰۰۲). مسئلهٔ تحقیق حاضر با این سؤال مطرح شد: «توانایی دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم در محاسبهٔ حد توابع با تأکید بر نمودار چگونه است؟»

روش پژوهش

برای یافتن پاســـخ ســـؤال پژوهش مبنی بر اینکه توانایی دانش‌آموزان در محاســـبهٔ حد با انواع بازنمایی چگونه است، دو آزمون طراحی شدند که اطلاعات و ادراک شهودی دانش‌آموزان را در مفهوم حد می‌ســـنجیدند. روش تحقیق مورد اســـتفاده توصیفی ـ پیمایشی بود. نمونهٔ آماری شامل ۲۷ نفر دانش‌آموز دختر بود که از بین دانش‌آموزان در دسترس پایهٔ یازدهم منطقهٔ ۳ شـــهر تهران که در سال تحصیلی ۹۸ ـ ۱۳۹۷ در رشته‌های

جدول ۱. مقایسهٔ تعداد پاسخ‌ها به مسئلهٔ اول در دو آزمون (آزمون اول مبتنی بر نمودار، آزمون دوم مبتنی بر ضابطهٔ تابع)

		قسمت‌های خواسته شده	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ اول از آزمون اول		$\lim_{x\to 3^-} g(x)$	۱۹	۸	-
		$\lim_{x\to 3^+} g(x)$	۲۱	۵	۱
		$\lim_{x\to 4^-} g(x)$	۲۲	۴	۱
		$\lim_{x\to 0} g(x)$	۲۱	۵	۱
		$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} g(x)$	۱۴	۱۲	۱
		$\lim_{x\to 2^+} g(x)$	۱۳	۱۳	۱
مسئلهٔ اول از آزمون دوم	$g(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ -1 & 1<x\le 3 \\ 1-\sqrt{x-3} & x>3 \end{cases}$	$\lim_{x\to 3^-} g(x)$	۲۴	۲	۱
		$\lim_{x\to 3^+} g(x)$	۲۵	۲	-
		$\lim_{x\to 4^-} g(x)$	۲۱	۴	۲
		$\lim_{x\to 0} g(x)$	۲۳	۴	-
		$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} g(x)$	۱۹	۶	۲
		$\lim_{x\to 2^+} g(x)$	۲۴	۳	-

شواهد قابل ملاحظه‌ای وجود دارند که دو نیم‌کرهٔ مغز، اطلاعات را به گونه‌هایی متفاوت پردازش می‌کنند. تحقیقات دو پزشک به نام‌های دکس و بروکا نشان داد که ناحیهٔ مربوط به سخن گفتن در سمت چپ مغز قرار دارد

تجربی و ریاضی مشـــغول به تحصیل بودند، انتخاب شد.

روایی صـــوری و محتوایی آزمون‌ها توسط چند نفر از دبیران ریاضی باتجربه و صاحب‌نظران مورد تأیید قرار گرفت. این دو آزمون پس از اجرای آزمایشـــی روی یک کلاس، در نمونهٔ اصلی برگزار شـــد. مســـائل اولین آزمـــون در قالب نمودارها ارائه شـــدند، اما در آزمون دوم همان مســـائل بدون نمـــودار و صرفاً با دادن ضابطه و معـــادلات جبری توابع مطرح شـــدند. هر یک از این آزمون‌ها چهار مســـئلهٔ چندقسمتی داشتند که در اینجا به ارائهٔ نتایج بررسی حاصل از دو مسئله بسنده شده است. قسمت‌های انتخابی هـــر دو آزمون مقادیر حد یک

جدول ۲. مقایسهٔ درصدی نتایج دو آزمون (آزمون اول مبتنی بر نمودار، آزمون دوم مبتنی بر ضابطهٔ تابع)

		قسمت‌های خواسته شده	آزمون	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ اول	۱	$\lim_{x\to 3^-} g(x)$	آزمون اول	۷۰/۳۷	۲۹/۶۹	۰
			آزمون دوم	۸۸/۸۹	۷/۴۰	۳/۷
	۲	$\lim_{x\to 3^+} g(x)$	آزمون اول	۷۷/۷۷	۱۸/۵۱	۳/۷
			آزمون دوم	۹۲/۵۹	۷/۴۰	۰
	۳	$\lim_{x\to 4^-} g(x)$	آزمون اول	۸۱/۴۸	۱۴/۸۱	۳/۷
			آزمون دوم	۷۷/۷۷	۱۴/۸۱	۷/۳
	۴	$\lim_{x\to 0} g(x)$	آزمون اول	۷۷/۷۷	۱۸/۵۱	۳/۷
			آزمون دوم	۸۵/۱۸	۱۴/۸۱	۰
	۵	$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} g(x)$	آزمون اول	۵۱/۸۵	۴۴/۴۴	۳/۷
			آزمون دوم	۷۰/۳۷	۲۲/۲۲	۷/۳
	۶	$\lim_{x\to 2^+} g(x)$	آزمون اول	۴۸/۱۴	۴۸/۱۴	۳/۷
			آزمون دوم	۸۸/۸۹	۱۱/۱۱	۰

تابـع را در نقطه‌های متفاوت می‌ســنجیدند: در آزمون اول با توجه بــه **نمودار** و در آزمون دوم با توجه به **ضابطهٔ** همان تابع. برای بررسی و تحلیل داده‌ها از آمار توصیفی استفاده شد.

نتایج تحقیق

برای بررسی و تفسیر پاسخ‌های دانش‌آموزان، تعداد پاسخ‌های درســت، نادرست و بدون پاسخ برای هر قســمت شمارش و درصد آن‌ها محاسبه و با هم مقایسه شد. نتایج حاصل از این بررسی در جدول ۱ نشان داده شده است.

با نگاهی به داده‌های جدول ۱ دیده می‌شــود که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به سؤال‌ها از روی نمودار نسبت به پاسخ‌گویی همان سؤال‌ها از روی معادلهٔ تابع، عملکرد پایین‌تری داشتند. این اتفاق به‌خصوص در مورد محاســبهٔ حــد در نقطه‌های میانی دامنه و عددهای گنگ مشهودتر است. شاید بتوان گفت عادت به استفاده از الگوریتم‌ها و رویه‌ها به جای درک مفاهیم اساســی حد، باعث این نوع عملکرد شــده است. حال آنکه در صورت استفادهٔ هم‌زمان از انواع بازنمایی‌ها، از جمله نمودار، درک بهتــری از مفهوم حد در ذهــن دانش‌آموز نقش می‌بندد. جدول ۲ نتایج مقایسهٔ هم‌زمان عملکرد دانش‌آموزان در دو آزمون را نشان می‌دهد.

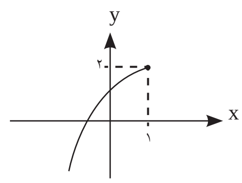
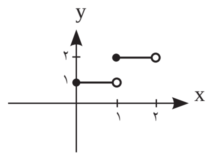
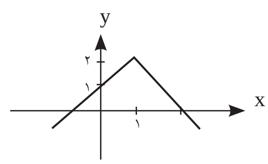
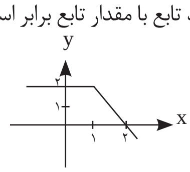
با مقایسهٔ هم‌زمان نتایج دو آزمون می‌توان به این نتیجه رســید که دانش‌آموزان برای محاسبهٔ حد از روی نمودار بــرای نقاطی که در آن‌ها تابع پیوسته نیســت، به درک عمیقی نرسیده‌اند. مثلاً در پاســخ‌گویی به قسمت ۱ (محاسبهٔ حد راست تابع در نقطهٔ ۳ که تابع در آن ناپیوســته اســت و در دو طرف نقطــهٔ ۳، دو ضابطهٔ متفاوت دارد)، از روی نمودار ۸ نفر (۲۹/۶۲٪) پاسخ نادرست داده‌اند، در حالی‌که فقط ۲ نفر (۷/۴٪) به همین قســمت در آزمون ۲ پاسخ نادرست داده‌اند. در پاسخ‌گویی به قســمت ۲ (محاسبهٔ حد چپ تابع در نقطهٔ ۳) نیز همین شرایط مشــاهده می‌شود (۱۸٪ پاسخ نادرست در آزمون اول در مقابل ۷٪ پاسخ نادرست در آزمون دوم). در حالی‌که برای تشخیص حد تابع در نقطه‌های ۴ و ۵ که تابع در آن‌ها پیوسته است، در هر دو آزمون تقریباً نتایج مشابهی دیده می‌شود.

همچنین، محاسبهٔ حد در عددهای گنگ نیز برای دانش‌آموزان آســان نیست. مثلاً برای یافتن

جدول ۳. جدول تعداد پاسخ‌ها به مسئلهٔ دوم در آزمون اول

	قسمت‌ها	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ دوم	نمودار تابعی که در x=۱ حد راستی برابر ۲ داشته باشد.	۲۱	۵	۱
	نمودار تابعی که در x=۱ حد نداشته باشد.	۲۰	۶	۱
	نمودار تابعی که در x=۱ تعریف نشده باشد و حد آن در نقطه یک برابر ۲ باشد.	۱۷	۱۰	۰
	نمودار تابعی که در x=۱ مقدار تابع با حد آن برابر باشد.	۲۱	۵	۱

جدول ۴. جدول تعداد پاسخ‌ها به مسئلهٔ دوم در آزمون دوم

	شماره	قسمت‌ها	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ دوم	۱	 تابع در x=۱ حد راستی برابر ۲ دارد.	۲۲	۵	۰
	۲	 تابع در x=۱ حد ندارد.	۲۱	۶	۰
	۳	 تابع در x=۱ تعریف نشده و $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$	۱۶	۱۱	۰
	۴	در x=۱ حد تابع با مقدار تابع برابر است. 	۱۸	۹	۰

یادگیرنده براساس تجسم ذهنی، مدل‌های ذهنی‌اش را می‌سازد. پژوهشگران رابطهٔ بین تجسم ذهنی و مدل‌های ذهنی وابسته را مورد توجه قرار داده و معتقدند که مدل‌های ذهنی، نمایش‌های درونی و تجسم ذهنی، بازنمایی‌های بیرونی هستند

جدول ۵. مقایسهٔ درصدی نتایج دو آزمون (آزمون ۱ مبتنی بر نمودار، آزمون ۲ مبتنی بر ضابطه تابع)

	قسمت‌ها	آزمون	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ دوم	۱	آزمون اول	۷۷/۷۸	۱۸/۵۲	۳/۷
		آزمون دوم	۸۱/۴۸	۱۸/۵۲	۰
	۲	آزمون اول	۷۴/۰۷	۲۲/۲۲	۳/۷
		آزمون دوم	۷۷/۷۸	۲۲/۲۲	۰
	۳	آزمون اول	۶۲/۹۶	۳۷/۰۴	۰
		آزمون دوم	۵۹/۲۶	۴۰/۷۴	۰
	۴	آزمون اول	۷۷/۷۸	۱۸/۵۲	۳/۷
		آزمون دوم	۶۶/۶۷	۳۷/۵	۰

پاسخ قسمت ۵ (حد راست تابع در نقطهٔ $\sqrt{۲}$)، در آزمون اول ۱۲ نفر دچار اشتباه شدند، در حالی‌که ۶ نفر در آزمون دوم پاسخ نادرست دادند. شاید یکی از دلایل این امر، نداشتن توانایی کافی در پیدا کردن محل تقریبی عدد گنگ ($\sqrt{۲}$) روی محور عددهاست که این موضوع باز هم به درک شهودی آنان مربوط است و در نهایت به پاسخ نادرست به سؤال حد منجر می‌شود (۴۴٪ در آزمون ۱ و ۲۲٪ در آزمون ۲).

در مسئلهٔ دوم آزمون اول، از دانش‌آموزان خواسته شد که با توجه به شرایط داده شده، نمودار رسم کنند. نتایج حاصل از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به این مسئله از آزمون اول در جدول ۳ آمده است.

در آزمون دوم، از دانش‌آموزان خواسته شد با توجه به نمودارهای رسم شده، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر هر نمودار را با ذکر دلیل مشخص کنند. درواقع هدف از طرح این نوع مسئله‌ها استفاده از «بازنمایی نوشتاری» توسط دانش‌آموزان است. این نوع بازنمایی‌ها نمادگذاری‌هایی هستند که دانش‌آموزان آن‌ها را برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی در نوشتن، به‌کار می‌برند و شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیف‌ها می‌شوند (گویا و امامی، ۱۳۹۲). نتایج حاصل از بررسی این مسئله از آزمون دوم در جدول ۴ آمده است.

جدول ۵ نتایج بررسی درصدی هم‌زمان نتایج مسئلهٔ دوم هر دو آزمون را نشان می‌دهد.

بررسی نتایج این مسئله در دو آزمون حاکی از آن است که تفاوت چشم‌گیری در پاسخ‌گویی به این مسائل وجود ندارد. شاید علت این امر را در باز ـ پاسخ بودن مسئلهٔ آزمون اول بتوان جست‌وجو کرد. یعنی وقتی به دانش‌آموز اجازه می‌دهیم که با **خلاقیت** خود به سؤال پاسخ دهد و به‌خصوص از او می‌خواهیم که نمودار رسم کند، تفکر شهودی به کمک دانش‌آموز می‌آید و از بروز اشتباه و خطا جلوگیری می‌کند. توجه به این نکته ضروری است که ارائهٔ چندین بازنمایی و ارتباط بین آن‌ها برای بررسی یک مفهوم، می‌تواند به منظور ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم و موضوع‌های ریاضی مهم باشد (اینسورث، ۲۰۰۶؛ دافعی، ۱۳۹۴). دانش ریاضی ساخته شده به این شیوه عمیق‌تر است؛ همچنین باعث تحریک حس کنجکاوی دانش‌آموز می‌شود تا لابه‌لای طرحواره‌های خود به جست‌وجو بپردازد و بین موضوع‌ها و مفاهیم مختلف **اتصال** برقرار کند. در نتیجه یادگیری فرد در ریاضی بهتر صورت می‌پذیرد. پس می‌توان این‌طور نتیجه گرفت که استفاده از انواع سؤال‌ها از جمله سؤال‌های باز ـ پاسخ نیز در بروز خلاقیت دانش‌آموزان مؤثر است. از طرف دیگر کمک شایانی به معلم در پی بردن به موارد مبهم و بدفهمی‌های دانش‌آموزان می‌کند.

بحث و نتیجه‌گیری

شکی نیست که دانش ریاضی شرط مهم و لازمی برای تدریس کارآمد معلم است. تدریس با کیفیتی عالی، به دانشی عمیق از ماهیت موضوع نیاز دارد که برای آن هیچ بدیل و جانشینی نیست (ریحانی، ۱۳۹۶). از طرف دیگر، «درک» قطعاً هدف یادگیری است و بدون درک، یادگیری ریاضیات به حفظ فرمول‌ها، رویه‌ها و قواعد حاکم بر آن‌ها تبدیل می‌شود. ریاضیاتی که بدین‌گونه آموخته می‌شود، هدفمند نیست و کمتر سودمند است. توجه به هدف‌های آموزشی و اینکه یادگیرنده چگونه و با چه فرایندی به این هدف‌ها می‌رسد، به طراحان و برنامه‌نویسان آموزشی و معلمان کمک می‌کند، محتوای آموزشی را متناسب با ویژگی‌های درونی یادگیرنده تدریس کنند. رویکردهای تدریس قسمت ویژه‌ای از آموزش ریاضی است و فرایندهای یاددهی ـ یادگیری ریاضیات فراتر از آموزش مفاهیم، رویه‌ها و تکنیک‌هاست. تحقیقات نشان می‌دهند، زمانی که دانش‌آموزان به دانش‌ها و تکنیک‌های مناسبی مجهز هستند، بدین معنا نیست که به‌طور خودکار و در مواقع ضروری آن را به‌کار می‌گیرند. یادگیری تفکر و ریاضی‌وار، چیزی بیشتر از یادگیری صرف ابزار ریاضی است (تال، ۱۹۹۱)؛ هرچند روانی کار با ابزار را نمی‌توان انکار کرد. ذکر این نکته ضروری است که تجسم می‌تواند از روش‌های جانشین و

نیم‌کره‌های مغز مکمل یکدیگرند و هر دو نیمه به یک اندازه در یادگیری تأثیر دارند. به‌خصوص یادگیری ریاضیات با مخاطب قرار دادن هر دو نیم‌کره و استفاده از کل مغز ممکن خواهد بود

مرجعی مؤثر در یادگیری ریاضیات باشد و نیز نمودارها می‌توانند در توسعهٔ منطق ریاضی به دانش‌آموزان کمک کنند.

یکی از عوامل تأثیرگذار بـــر بدفهمی حد، تأکید بر دانش رویـــه‌ای به جـــای دانش مفهومی اســـت. طیف وســـیعی از دانش‌آموزان، ضمن تسلط بر روش‌های الگوریتمی و جبری، با بازنمایی‌های دیگر مثل هندســـی و گرافیکی، سازگاری ندارند. محققان به این نتیجه رسیده‌اند که توانایی شناسایی و نمایش یک مفهوم ریاضی در بازنمایی‌های متفاوت و انعطاف در حرکت از یـــک بازنمایی به بازنمایی دیگر، بـــرای یادگیری آن مفهوم ضروری است. این فعالیت‌ها همان‌طور که به دانش‌آموزان اجازه می‌دهند روابط غنی را ببینند، به همان اندازه نیز باعث توسعهٔ درک عمیق‌تر مفاهیم می‌شوند (تامسون، ۱۹۹۴، نقل شده در: پرهیزگار، ۱۳۸۷).

اینسورث (۲۰۰۶) اعتقاد دارد که بازنمایی‌ها از مسیرهای متفـــاوت بر یادگیری دانش‌آموزان اثر می‌گذارند و اســـتفاده از بازنمایی‌های مختلف به‌صورت تلفیقی، نقش مهمی در رسیدن به تفکر انتزاعی دارد. درواقع، به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه، دانش‌آموزان را تشـــویق می‌کند به شیوهٔ دلخواه خود به انتزاع برسند.

شـــوارتز (۱۹۹۵، نقل شـــده در: احمـــدی، ۱۳۹۶؛ تال، ۱۹۹۱) بیان می‌دارد که وقتی چند بازنمایی را به‌طور مرتبط به دانش‌آموزان ارائه می‌کنیم، نسبت به بازنمایی‌های منفرد، بیشتر باعث درک انتزاعی یادگیرندگان می‌شوند. ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های متفاوت و اتصال و ارتباط آن‌ها به یکدیگر، باعث به وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها به کمک یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به ســـادگی می‌توانست حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها ســـازگارتر و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرار گرفته بود (گویا و سرشتی، ۱۳۸۵).

شایان ذکر است، بعضی از تحقیقات جدید نیز به این نکته اشاره کرده‌اند که اگر استفاده از این بازنمایی‌ها به درستی صورت نگیرد، ممکن اســـت در روند آموزش اختلال و شکست ایجاد کند؛ مگر آنکه:

۱. دانش‌آموز بتواند هر بازنمایی را به‌طور جداگانه تفسیر کند؛

۲. بین انواع بازنمایی‌ها ارتباط و اتصال برقرار کند (مارتینا و همکاران، ۲۰۱۷).

بـــا توجه بـــه اهمیت مفهوم حـــد، لزوم اســـتفاده از انواع بازنمایی‌ها ضروری به نظر می‌رســـد. از طـــرف دیگر، به دلیل وجود انواع بدفهمی‌ها در این‌گونه مسائل، ارزیابی و مقایسهٔ انواع بازنمایی‌ها نیز لازم است. اســـتفاده از بازنمایی‌های گوناگون و مرتبط کردن آن‌ها به یکدیگر، باعث درک بهتر دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی و از جمله مفهوم حد می‌شود. لذا اگر بازنمایی‌ها به‌طور دقیقی به هم مرتبط شوند، به درک عمیق‌تر موضوع‌های ریاضـــی می‌انجامند. همچنین هنگامی کـــه دانش‌آموز در پی استفاده از بازنمایی‌های دیگر، قادر به حل مسئله‌ای می‌شود که تا پیش از این، رسیدن به پاسخ آن برایش سخت یا غیرممکن می‌نمود، به فایده و انعطاف‌پذیری ریاضی معترف می‌شود.

نتایـــج پژوهش حاضر نشـــان می‌دهد کـــه دانش‌آموزان در پاســـخ‌گویی به ســـؤال‌های حد از روی نمودار نســـبت به پاســـخ‌گویی همان ســـؤال‌ها به کمک ضابطهٔ تابع، عملکرد پایین‌تری دارند. این نتیجه با پژوهش‌های پیشـــین (نظری، ۱۳۹۰ و عربزاده، ۱۳۸۸) همســـویی دارد. شاید بتوان گفت برای اغلـــب دانش‌آموزان اســـتفاده از فرمول‌ها و رویه‌ها کار ساده‌تری به نظر می‌رسد. شواهد و بررسی محققان نشان داده اســـت که درک عمیق و پایدار با شهود و تجسم ذهنی اتفاق می‌افتد. بنابراین مناسب اســـت معلمان برای ایجاد انگیزه و نیز درک بصری بهتر دانش‌آموزان و فهم عمیق‌تر مفهوم حد،

اگر دانش‌آموزان مفهوم حد را به درستی درک نکنند، نمی‌توانند دیگر مفاهیم وابسته به آن را نیز درک کنند. در نتیجه، توجه درست و صحیح به آموزش حد می‌تواند بسیاری از مشکلات آتی دانش‌آموزان و نیز دانشجویان را در حساب دیفرانسیل و انتگرال برطرف سازد

آموزش خود را با مثال‌های متنوعی از نمودارها آغاز کنند، با ارائهٔ نمودارهای متنوع، مفهوم حد را درس دهند و سپس به سراغ قضایا و تعاریف، و تکنیک‌ها و رویه‌ها بروند.

توازن و تعادل در استفاده از بازنمایی‌های متنوع ریاضی، باعث ارتقای بینش و توانایی‌های دانش‌آموزان می‌شود. از یک طرف، استفادهٔ صرف از رویکردهای غیرتجسمی، ریاضیات را خشک و انعطاف‌ناپذیر جلوه می‌دهد و از طرف دیگر، استفادهٔ بیش از حد از شـــهود و تجسم نیز به دوری از زبان صوری و رســـمی ریاضی می‌انجامد. لـــذا **استفادهٔ متناسب** از هر دو رویکرد نتیجهٔ بهتری در امر آموزش را سبب می‌شود. استفاده از رایانـــه و نرم‌افزارهایی چون «جئوجبرا» کمک شـــایانی به درک بصری و شـــهودی دانش‌آموزان می‌کند. لذا اســـتفاده از فناوری‌هـــای جدید توصیه می‌شـــود. همچنین در تألیف

کتاب‌های جدید، استفاده از نمودارها به‌خصوص در شروع هر مبحث باید مورد توجه قرار گیرد.

پی‌نوشت‌ها

1. Presmeg
2. Tall
3. Decks & Broka
4. Reiner
5. Lesh
6. Dienes
7. Ainsworth
8. Polya
9. Pedagogy lnowledge

منابع

۱. احمدی، ســاناز (۱۳۹۶). «تحلیل محتوای کتــاب ریاضی پایه دهم». پایان‌نامهٔ کارشناســی ارشد آموزش ریاضی. دانشــگاه تربیت‌دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه. تهران.

۲. پولیا، جرج (۱۳۸۵). چگونه مســئله را حــل کنیم. ترجمهٔ احمد آرام. شرکت انتشارات کیهان. تهران.

۳. پرهیــزگار، بی‌بی زکیــه (۱۳۸۷). «درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع». پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد. آموزش ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی. تهران.

۴. دافعی، حمید (۱۳۹۴). «نقش ســؤال‌های پاسخ ـ باز و فرایند ـ باز در آموزش ریاضی». فصلنامهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۱۲۱.

۵. عربزاده، رضــا (۱۳۸۸). «تأثیر آموزش تجســم محور بر عملکرد حل مســئلهٔ ریاضی دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی و نگرش آن‌ها نسبت به ریاضی». پایان‌نامهٔ کارشناســی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی. دانشکده علوم پایه. تهران.

۶. گویا، زهرا و امامی، علــی (۱۳۹۲). «بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در درک مفهوم تابع». فصلنامهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۱۱۴.

۷. گویا، زهرا و سرشــتی، حمیده (۱۳۸۵). «آموزش حســابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی (قســمت اول)». فصلنامهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۸۴.

۸. مهرمحمدی، محمــود و فاضلی، احمدرضــا (۱۳۹۴). «ماهیت دانش تدریــس و دانش معلمان: مقایســهٔ دیدگاه شــولمن و فنســتر ماخر». پژوهش‌نامهٔ مبانی تعلیم‌وتربیت. دورهٔ ۵. شمارهٔ ۱.

۹. نظری، کامل (۱۳۹۰). «بررسی تأثیر تدریس حد با رویکرد تجسم‌محور بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم متوسطه از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آن‌ها». پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت‌دبیر شهید رجایی. دانشکده علوم پایه. تهران.

۱۰. نــوروزی لرکی، فرزانه و همــکاران (۱۳۸۹). «بازنمایی‌های چندگانه فرایندی مهم در یاددهی ـ یادگیری کســرها». نشــریهٔ علمی، پژوهشی. فناوری آموزش. سال پنجم. شمارهٔ ۱.

11. Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction*, 16(3), 183 - 198.

12. Ainsworth. S (2008). The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In *Visualization. Theory and practice in science education* (pp. 191 - 208). Springer. Dordrecht.

13. Ainsworth. S (1990). The functions of multiple representations. Computers & Education. 33(2), 131 - 152.

14. Çıkla, Oylum. A.(2004). The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference. *Unpublished doctoral dissertation, Middle East Technical University, Ankara*.

15. Emerson RW, Anderson D, (2018). What Mathematical Images Are in a Typical Mathematics Textbook? Implications for Students with Visual Impairments. Journal of Visual Impairment & Blindness.112(1): 20- 32.

16. Gilbert, J. K,(2008). Visualization: An emergent field of practice and enquiry in science education. In *Visualization: Theory and practice in science education* (pp. 3- 24). Springer, Dordrecht.

17. Kiymaz,Y., Ssriraman, B., & Lee, K. H. (2012). Prospective secondary teachers Mathematical Creativity in problem Solving. The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics, 173- 191.

18. Martina A. Rau, Vincent Aleven, Nikol Rummel. (2017). Supporting Students in Making Sense of Connections and in Becoming Perceptually Fluent in Making Connections Among Multiple Graphical Representations. Journal of Educational Psychology، 109(3), 355.

19. National council of Teacher of Mathematics, (2000). Principle and Students for School Mathematics. Reston VA: Author.

20. Presmeg, N. C. (2007). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205-235.

21. Rapp, D. N., & Kurby, C. A, (2008). The 'ins' and 'outs' of learning: Internal representations and external visualizations. In Visualization: *Theory and practice in science education* (pp. 29- 52). Springer, Dordrecht.

22. Reiner, M, (2008). The nature and development of visualization: A review of what is known. *Visualization: Theory and practice in science education,* 25- 27.

23. Rivera, F,(2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues* (Vol. 49). Springer Science & Business Media.

24. Sochański M, (2018). What is Diagrammatic Reasoning in Mathematics?. Logic and Logical Philosophy,1- 15.

25. Tall, D. o (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to Limits and continuity. Educational Studies in *mathematics* 12, no. 2,151- 169.

26. Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.